МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

О. М. Штельма

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

З КУРСУ

«ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ»

(для студентів 2 курсу денної форми навчання освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 122 – Комп'ютерні науки)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2018

Штельма О. М. Конспект лекцій з курсу «Оптимізаційні методи та моделі» (для студентів 2 курсу денної форми навчання освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 122 – Комп'ютерні науки) / О. М. Штельма; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 38 с.

Автор О. М. Штельма

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. О. Б. Костенко

Рекомендовано кафедрою прикладної математики та інформаційних технологій, протокол № 1 від 31.08.2015.

Зміст

1 Теоретичні основи моделювання

1.1 Поняття моделі, їх види

Модель від лат. («modulus» — зразок, норма, міра.) — це об’єкт, що заміщує оригінал і відбиває його найважливіші риси й властивості для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез.

Математична модель — це абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь і/чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється.

Сутність методології математичного моделювання полягає в заміні досліджуваного об’єкта його «образом» — математичною моделлю — і подальшим вивченням (дослідженням) моделі на підставі аналітичних методів та обчислювально-логічних алгоритмів, які реалізуються за допомогою комп’ютерних програм. Робота не із самим об’єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість відносно швидко і безболісно досліджувати його основні (суттєві) властивості та поведінку за будь-яких імовірних ситуацій (це переваги теорії). Водночас обчислювальні (комп’ютерні, симулятивні, імітаційні) експерименти з моделями об’єктів дозволяють ретельно та досить глибоко вивчати об’єкт, що недоступно суто теоретичним підходам (це перевага експерименту).

Вже сама постановка питання щодо математичного моделювання будь-якого об’єкта породжує чіткий план дій, який умовно можна поділити на три етапи: модель — алгоритм — програма (рис. 1.1).

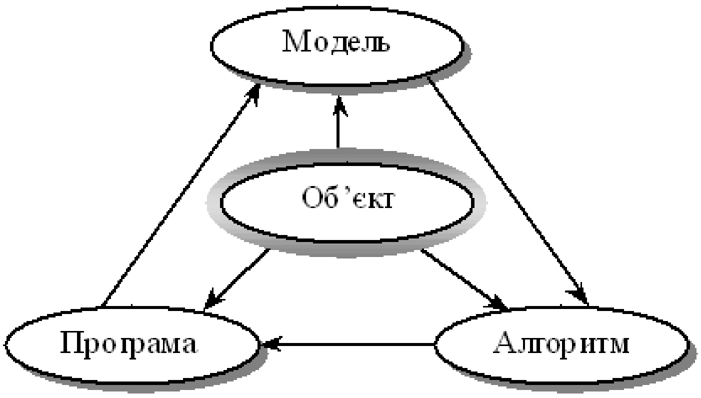

Рисунок 1.1 – Узагальнена схема математичного моделювання

На першому етапі обирається (чи будується) «еквівалент» об’єкта, що відображає в математичній формі найважливіші (ключові) його властивості — закони, яким він підпорядковується, зв’язки, що притаманні складовим його частинам, тощо. Математична модель (чи її фрагменти) досліджуються теоретичними методами, що дає змогу отримати важливі (концептуального характеру) нові знання про об'єкт.

Другий етап — вибір (чи розроблення) алгоритму для реалізації моделі на комп'ютері. Модель подається у формі, зручній для застосування числових методів, визначається послідовність обчислювальних і логічних операцій, котрі необхідно здійснити, щоб отримати шукані величини із заданою точністю.

На третьому етапі створюються програми, що «переносять» модель і алгоритм на доступну комп'ютерну мову. Їх можна назвати «електронним» еквівалентом досліджуваного об'єкта, що є придатним для безпосереднього експериментування на комп'ютері.

Створивши тріаду: «модель — алгоритм — програма», дослідник (системний аналітик) отримує універсальний, гнучкий і відносно дешевий інструмент, який тестується в «пробних» обчислювальних експериментах. Після того як адекватність (достатній рівень відповідності, зважаючи на цілі та прийняту систему гіпотез) тріади щодо досліджуваного об'єкта засвідчена, з моделлю проводять різноманітні та детальні «досліди», які дають нову інформацію про необхідні якісні та кількісні властивості й характеристики об'єкта. Процес моделювання супроводжується поліпшенням та уточненням, за необхідності, всіх складових (ланок) тріади.

1.2 Принципи побудови математичних моделей

Формулювання предмета й мети дослідження реального об'єкта. Таким об'єктом виступає сукупність деяких якостей досліджуваного явища або процесу.

Виділення в економічному об'єкті найбільш важливих структурних і функціональних елементів і їхніх характеристик.

Формалізація визначальних елементів економічного об'єкта і їхніх взаємозв'язків.

Визначення виду вхідної інформації (вхідні параметри моделі) і вихідної інформації (розрахункові параметри моделі).

Постановка задачі - створення основи математичної моделі - одержання замкнутої й внутрішньо несуперечливої сукупності математичних співвідношень, призначених для опису досліджуваного економічного об'єкта через розрахункові змінні. В інформаційному аспекті модель є оператором відбиття інформаційного поля реального об'єкта в кінцеву сукупність розрахункових інформаційних ознак. Вибір цього оператора залежить від автора моделі.

Визначення функціональної надійності моделі – установлення області її адекватності досліджуваному об'єкту.

1.3 Класифікація моделей

Для класифікації економіко-математичних моделей використовують різні класифікаційні ознаки.

За цільовим призначенням економіко-математичні моделі поділяються на теоретико-аналітичні, що використовуються під час дослідження загальних властивостей і закономірностей економічних процесів, і прикладні, що застосовуються у розв’язанні конкретних економічних задач (моделі економічного аналізу, прогнозування, управління).

Відповідно до загальної класифікації математичних моделей вони поділяються на функціональні та структурні, а також проміжні форми (структурно-функціональні). Типовими структурними моделями є моделі міжгалузевих зв’язків. Прикладом функціональної моделі може слугувати модель поведінки споживачів в умовах товарно-грошових відносин.

Моделі поділяють на дескриптивні та нормативні. Прикладом дескриптивних моделей є виробничі функції та функції купівельного попиту, побудовані на підставі опрацювання статистичних даних. Типовим прикладом нормативних моделей є моделі оптимального (раціонального) планування, що формалізують у той чи інший спосіб цілі економічного розвитку, можливості і засоби їх досягнення.

За характером відображення причинно-наслідкових аспектів розрізняють моделі жорстко детерміновані і моделі, що враховують випадковість і невизначеність.

За способами відображення чинника часу економіко-математичні моделі поділяються на статичні й динамічні.

Моделі економічних процесів надзвичайно різноманітні за формою математичних залежностей. Важливо виокремити клас лінійних моделей, що набули значного поширення завдяки зручності їх використання. Відмінності між лінійними і нелінійними моделями є суттєвими не лише з математичного погляду, а й у теоретико-економічному плані, адже багато залежностей в економіці мають принципово нелінійний характер.

За співвідношенням екзогенних і ендогенних змінних, які включаються в модель, вони поділяються на відкриті і закриті. Повністю відкритих моделей не існує; модель повинна містити хоча б одну ендогенну змінну. Повністю закриті економіко-математичні моделі, тобто такі, що не містять екзогенних змінних, надзвичайно рідкісні. Переважна більшість економіко-математичних моделей посідає проміжну позицію і розрізняється за ступенем відкритості (закритості).

Класифікація видів математичних моделей може проводитися й за такими ознаками: аналітичне та комп’ютерне моделювання (рис. 1.3).

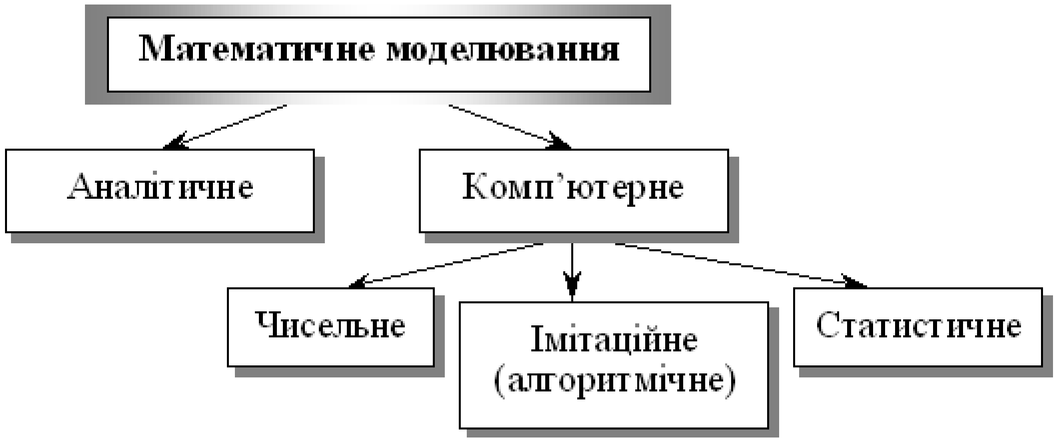

Рисунок 1.3 – Аналітичне та комп'ютерне моделювання

Для аналітичного моделювання характерним є те, що процеси функціонування елементів системи записують у вигляді деяких математичних співвідношень (алгебраїчних, інтегро-диференційних, кінцево-різницевих тощо) чи логічних умов.

Комп'ютерне моделювання характеризується тим, що математична модель системи (використовуючи основні співвідношення аналітичного моделювання) подається у вигляді деякого алгоритму та програми, придатної для її реалізації на комп'ютері, що дає змогу проводити з нею обчислювальні експерименти. Залежно від математичного інструментарію (апарату), що використовується в побудові моделі, та способу організації обчислювальних експериментів можна виокремити три взаємопов'язані види моделювання: чисельне, алгоритмічне (імітаційне) та статистичне.

У чисельному моделюванні для побудови комп'ютерної моделі використовуються методи обчислювальної математики, а обчислювальний експеримент полягає в чисельному розв'язанні деяких математичних рівнянь за заданих значень параметрів і початкових умов.

Алгоритмічне (імітаційне) моделювання (може бути детермінованим та стохастичним) — це вид комп'ютерного моделювання, для якого характерним є відтворення на комп'ютері (імітація) процесу функціонування досліджуваної складної системи.

Статистичне моделювання — це вид комп'ютерного моделювання, який дозволяє отримати статистичні дані відносно процесів у модельованій системі.

2 Оптимізаційні математичні моделі

2.1 Загальна постановка оптимізаційної задачі

Використання математичних методів в інженерно-економічній діяльності дозволяє оптимально вирішувати велику кількість економічних задач. Прикладами можливих економічних задач, що яскраво ілюструють корисність запропонованої дисципліни, можуть бути такі текстові задачі:

– одержати максимальний вихід продукції або прибуток при зазначених витратах коштів;

– забезпечити планові показники підприємства при мінімальних витратах коштів;

– досягти максимально скороченого терміну будівництва об'єкта в умовах використання зазначених коштів та трудових ресурсів.

У наведених прикладах максимальний вихід продукції, максимальний прибуток, мінімальні витрати, максимально скорочений термін – це є оптимуми (максимуми або мінімуми), які потрібно знайти.

Умови, які накладаються на рішення задачі (задані матеріальні, трудові витрати; планові показники; виробничі ресурси), називають обмеженнями задачі.

2.1.1 Змістовна постановка оптимізаційної задачі

Змістовна постановка задачі – це її словесний опис. Змістовна постановка задачі повинна дозволяти переходити до математичної моделі.

Приклад 1. *Для виготовлення трьох видів виробів A, B і C підприємство використовує сировину двох видів. Норми витрати сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу A, B і C, а також загальна кількість сировини кожного виду, що може бути використана підприємством, наведені в (табл. 2.1). Вироби A, B і C можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), але виробництво обмежене виділеною підприємству сировиною кожного виду. Скласти план виробництва виробів, при якому загальна вартість всієї зробленої продукції є максимальною.*

Таблиця 2.1

Вид сировини	Норми витрати сировини на виробництва одного виробу (кг)			Загальна кількість сировини (кг)
	A	B	C	
I	7	11	9	450
II	4	8	9	370
Ціна одного виробу (грн)	6	9	12	

2.1.2 Математична постановка оптимізаційної задачі.

У загальному вигляді математична постановка екстремальної задачі полягає у визначенні найбільшого (максимального) або найменшого (мінімального) значення цільової функції $Y(x_1, x_2, ..., x_n) = Y(\bar{x})$ за умов $f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i$ $(i = \overline{1, m})$ де Y і f_i – задані функції, а b_i – дійсні числа

$$Y(\bar{x}) \to \underset{\bar{x}\in\Omega}{opt} \qquad (2.1)$$

$$\Omega:\begin{cases} f_i(\bar{x}) \le b_i\,, \\ f_i(\bar{x}) = b_i, \\ f_i(\bar{x}) \ge b_i\,, \\ \left(i = \overline{1,m}\right) \end{cases} \qquad (2.2)$$

2.2 Побудова математичних моделей

Для побудови математичної моделі задачі необхідно:

Визначити *невідомі*;

Скласти *цільову функцію* $\mathrm{Y}(\bar{\mathrm{x}})$;

Записати *систему обмежень* Ω .

У ***прикладі 1*** дана змістовна постановка задачі планування виробництва.

Розберемо процес побудови математичної моделі задачі.

Визначаємо невідомі $-x_1, x_2, x_3$. Буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду А, x_2 – виду В і x_3 – виду С.

Сформуємо функцію мети $Y(\bar{x})$. Якщо буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду А, x_2 – виду В і x_3 – виду С, то прибуток становитиме $Y\left(x_1, x_2, x_3\right) = 6x_1 + 9x_2 + 12x_3 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$

Визначаємо обмеження – область Ω.

Витрати сировини кожного із двох видів не повинні перевищувати виділеної підприємству кількості даної сировини:

$$7x_1 + 11x_2 + 9x_3 = 450;$$
$$4x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 370;$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0$$

При цьому кількість виготовлених виробів повинна бути невід’ємною:

$$x_1 \ge 0; \qquad x_2 \ge 0; \qquad x_3 \ge 0.$$

Таким чином, математична постановка задачі має вигляд:

$$Y\left(x_1, x_2, x_3\right) = 6x_1 + 9x_2 + 12x_3 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 7x_1 + 11x_2 + 9x_3 = 450 \\ 4x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 370 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0 \\ x_i = \mathrm{int}, i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Дана задача відноситься до задач цілочисельного лінійного програмування.

Приклад 2. Протягом п’яти років можливе здійснення восьми дослідницьких проектів. Очікуваний ефект від реалізації кожного проекту, відповідно становить 155, 130, 140, 120, 180, 175, 160 145 тис. у.о. Витрати за кожний і-й рік на здійснення проекту j відомі й наведені в матриці

$$\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix}15 & 10 & 10 & 5 & 30 & 30 & 20 & 10\\15 & 10 & 15 & 5 & 30 & 40 & 20 & 15\\20 & 15 & 20 & 5 & 30 & 50 & 20 & 10\\20 & 15 & 25 & 5 & 30 & 0 & 20 & 15\\20 & 10 & 20 & 5 & 20 & 0 & 10 & 10\end{bmatrix}.$$

Загальний ліміт капіталовкладень, виділених на дослідження в і-му році, відповідно дорівнює 100, 150, 150, 150 і 100 тис. у.о. Потрібно вказати максимально ефективний набір проектів, що не виводить за межі можливих вкладень.

Розв'язання.

1 Визначаємо невідомі $-x_1,\ x_2, x_3\ \ldots..\ x_8$.

Нехай x_j – змінна, рівна 1, якщо j-й проект здійснюється, і рівна 0 у протилежному випадку, $j=\overline{1,8}$.

2 Сформуємо функцію мети $Y(\bar{x})$.

$$Y(\bar{x})=155x_1+130x_2+140x_3+120x_4+180x_5+175x_6+160x_7+145x_8\to\max_{x_j\in\Omega}$$

3 Визначаємо обмеження – область Ω.

Сумарні витрати на всі фінансовані проекти за і-й рік $\left(i=\overline{1,5}\right)$ не повинні перевищувати загальний ліміт капіталовкладень виділених на відповідний рік:

$$15x_1+10x_2+10x_3+5x_4+30x_5+30x_6+20x_7+10x_8\le 100$$

$$15x_1+10x_2+15x_3+5x_4+30x_5+40x_6+20x_7+15x_8\le 150;$$

$$20x_1+15x_2+20x_3+5x_4+30x_5+50x_6+20x_7+10x_8\le 150;$$

$$20x_1+15x_2+25x_3+5x_4+30x_5+20x_7+15x_8\le 150;$$

$$20x_1+10x_2+20x_3+5x_4+20x_5+10x_7+10x_8\le 100;$$

Всі змінні x_j за умовою завдання є позитивними величинами, тобто

$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,8}$$

Крім того, змінні x_j можуть приймати тільки два значення: 0 або 1, тобто

$$x_j=\text{int},\quad j=\overline{1,8}.$$

Таким чином, математична постановка задачі має вигляд:

$$Y(\bar{x})=155x_1+130x_2+140x_3+120x_4+180x_5+175x_6+160x_7+145x_8\to\max_{x_j\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}15x_1+10x_2+10x_3+5x_4+30x_5+30x_6+20x_7+10x_8\le 100\\15x_1+10x_2+15x_3+5x_4+30x_5+40x_6+20x_7+15x_8\le 150\\20x_1+15x_2+20x_3+5x_4+30x_5+50x_6+20x_7+10x_8\le 150\\20x_1+15x_2+25x_3+5x_4+30x_5+20x_7+15x_8\le 150\\20x_1+10x_2+20x_3+5x_4+20x_5+10x_7+10x_8\le 100\\x_j\ge 0\, j=\overline{1,8}\\x_j=\text{int}\, j=\overline{1,8}\end{cases}$$

Дана задача відноситься до задач цілочисельного лінійного програмування.

3 Лінійна оптимізація. Транспортна задача

3.1 Математична постановка ЗЛП. Форми запису ЗЛП.

Загальна задача лінійного програмування формулюється таким чином: знайти оптимум лінійної цільової функції $y(\bar{x})$, якщо обмеження f_i лінійні і змінні $\bar{x}$ позитивні.

Аналітичний запис цієї задачі має вигляд:

$$y(\bar{x}) = \bar{c}^{\mathrm{T}}\bar{x} + c_0 \to \underset{\bar{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^n}{\mathrm{opt}}, \tag{3.1}$$

$$\Omega: \begin{cases} A_1\bar{x} + \bar{b}_1 \le 0; \\ A_2\bar{x} + \bar{b}_2 = 0; \\ A_3\bar{x} + \bar{b}_3 \ge 0; \\ \bar{x} \ge 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

де $\bar{x}$ – n-мірний вектор дійсних змінних $\bar{x} \in R^n$; $\bar{c}$ – n-мірний вектор коефіцієнтів функції, що оптимізується; c_0 – вільний член функції, що оптимізується; A_1, A_2, A_3 – матриці коефіцієнтів лінійних систем розмірності $m_1 \times n,\ \ m_2 \times n,\ \ m_3 \times n$ відповідно; $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ – вектори вільних членів обмежень розмірності $m_1 \times 1,\ \ m_2 \times 1,\ \ m_3 \times 1$ відповідно.

Задачу, подану вище, називають *стандартною* задачею лінійного програмування (ЗЛП).

ЗЛП, в якій обмеження записані у вигляді рівностей і змінні позитивні, називається ЗЛП в ***канонічній*** формі. *Канонічна*, або *основна* задача лінійного програмування має вигляд

$$y(\bar{x}) = \bar{c}^{\mathrm{T}}\bar{x} + c_0 \to \underset{\bar{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^n}{\mathrm{opt}}, \tag{3.3}$$

$$\Omega: \begin{cases} A\bar{x} = \bar{b}; \\ \bar{x} \ge 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

де A – матриця коефіцієнтів розмірності $m \times n$, $m < n$; $\bar{b}$ – вектор вільних членів обмежень розмірності $m \times 1$.

Задача (3.3)-(3.4) в алгебраїчному записі має такий вигляд:

$$y(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 \to \underset{\bar{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^n}{\mathrm{opt}}, \tag{3.5}$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \qquad\qquad \cdots \\ f_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,n}), \end{cases} \tag{3.6}$$

Перетворення стандартної ЗЛП до канонічної ЗЛП розглянемо на прикладах.

Приклад 3. *Перетворити в канонічну форму наступну задачу лінійного програмування*:

$$y(x) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \min_{\tilde{o}_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 \le 3 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Розв'язання.

Обмеження-нерівність типу "$\le$" можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової позитивної змінної, наприклад, $\{\ x_1 - x_3 + x_5 \le 3\ \}$ стане $\{\ x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 3\ \}$;

Обмеження-нерівність типу "$\ge$" перетвориться в обмеження-рівність відніманням з його лівої частини додаткової позитивної змінної, наприклад $\{\, x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8\, \}$ стане $\{\, x_1 + x_4 - 5x_5 - x_7 = 8\, \}$.

Канонічний вигляд початкової задачі:

$$y(x) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \min_{\tilde{o}_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_7 = 8 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Векторно-матрична форма запису початкової задачі:

$$y(x) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \bar{x} \to \min_{x \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}; \\ \bar{x} \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 4. *Перетворити в канонічну форму наступну задачу лінійного програмування*:

$$y(x) = 6x_1 - 4x_2 - 7x_4 + x_5 \to \min_{x_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5},$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 7x_5 \le 8; \\ 9x_1 - x_3 + 2x_5 \le 5; \\ x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 \ge 3;; \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Розв'язання.

1 Нерівності типу "≤" (f_1, f_2) перетворимо в рівність шляхом додавання до їх лівих частин двох додаткових змінних $\tilde{o}_6, \tilde{o}_7$. Отримаємо $f_1 = 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 7x_5 + x_6 = 8$; $f_2 = 9x_1 - x_3 + 2x_5 + x_7 = 5$.

2 Нерівність типу "≥" (f_3) перетворимо в рівність шляхом віднімання з його лівої частини додаткової змінної x_8. Отримаємо $f_3 = x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 - x_8 = 3$.

Канонічний вигляд початкової задачі:

$$y(x) = 6x_1 - 4x_2 - 7x_4 + x_5 \to \min_{x_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 7x_5 + x_6 = 8; \\ 9x_1 - x_3 + 2x_5 + x_7 = 5; \\ x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 - x_8 = 3;; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,8} \end{cases}$$

3.2 Властивості задачі лінійного програмування

Усі перші частинні похідні функції цілі та обмежені задачі константи, а похідні більших порядків дорівнюють нулю: $\frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = \bar{c}$; $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} = \mathbf{A}$.

Необхідні умови для точки локального мінімуму одночасно є достатніми і мають вигляд

$$\left(\frac{\delta y}{\delta \bar{t}}\right)^* \geq 0; \qquad t^* = 0.$$

<u>*Зауваження.*</u> Якщо $\frac{\delta y}{\delta t_r} = 0$ при $t_r > 0$, то завдяки лінійності y та $\bar{f}$ вона дорівнює нулю і в точці $t_r = 0$.

3.3 Транспортна задача

3.3.1 Постановка, методи розв'язання та аналізу

Транспортна задача є однією з найпоширеніших спеціальних задач лінійного програмування. Її мета – розробка найбільш раціональних шляхів і способів транспортування товарів, усунення надмірно дальніх, зустрічних, повторних перевезень. Все це скорочує час просування товарів, зменшує витрати підприємств, пов'язані із здійсненням процесів забезпечення сировиною, матеріалами, паливом, обладнанням і т.п.

У загальному вигляді транспортну задачу можна подати наступним чином: в m пунктах виробництва $A_1, A_2, .., A_m$ роблять деякий однорідний продукт у кількостях, відповідно, $a_1, a_2 .... a_m$. Цей продукт споживають у n пунктах $B_1, ..., B_n$

у кількостях, відповідно, $b_1, b_2 .... b_n$. Припустимо, що з кожного пункту виробництва можливе транспортування продукту в будь-який пункт споживання. Транспортні витрати на перевезення з пункту A_i у пункт B_j одиниці продукції дорівнює c_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Задача полягає у визначенні такого плану перевезень, при якому запити всіх споживачів повністю задоволені, весь продукт із пунктів виробництва вивезений і сумарні транспортні витрати мінімальні.

У залежності від співвідношення між сумарним обсягом виробництва (запасами вантажу) і сумарним споживанням, транспортні задачі бувають *закриті й відкриті.*

Закрита транспортна задача: Якщо обсяг виробництва дорівнює обсягу споживання, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

така транспортна задача називається закритою.

Відкрита транспортна задача: Якщо обсяг виробництва не дорівнює обсягу споживання, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

така транспортна задача називається відкритою.

Розглянемо ***закриту транспортну задачу.*** Умови транспортної задачі зручно подати у вигляді :

Пункти відправлення	**Запаси**	**Пункти призначення**					
		B_1	B_2	…	B_j	…	n
		Потреби					
		b_1	b_2	…	b_1	…	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Для складання математичної моделі задачі введемо змінні $x_{ij} \geq 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, що позначають кількість вантажу, перевезеного з і-го пункту виробництва в j-й пункт споживання.

Математична модель транспортної задачі має вигляд:

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min_{x_{ij}\in\Omega} \qquad (3.7)$$

$$\Omega:\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,(\mathrm{i}\ =\ 1,\ 2,\ ...,\mathrm{m};)\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,(\mathrm{j}\ =\ 1,\ 2,\ ...,\mathrm{n};)\\ x_{ij}\ge 0; i=\overline{1,\mathrm{m}},\ j=\overline{1,\mathrm{n}}.\end{cases} \qquad (3.8)$$

Умови (3.8) гарантують повне вивезення продукту з усіх пунктів виробництва й повне задоволення попиту у всіх пунктах споживання.

Транспортна задача являє собою задачу лінійного програмування із ($m\times n$) числом змінних x_{ij}, і ($m+n$) числом обмежень-рівностей.

Змінні x_{ij} нумерують за допомогою двох індексів і тому записують у вигляді матриці:

$$X=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & . & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & . & x_{2n}\\ . & . & . & .\\ x_{m1} & x_{m2} & . & x_{mn}\end{bmatrix}$$

Матрицю X називають планом перевезень транспортної задачі, а змінні x_{ij} — перевезеннями.

Матриця С = || c_{ij}|| називається матрицею транспортних витрат. Оптимальним рішенням задачі є матриця

$$X_{opt}=(x_{ij})_{m\times n},$$

яка задовольняє системі обмежень і надає мінімум цільовій функції. Існують ручні й машинні методи рішення транспортної задачі. До ручних відносяться розподільний метод, метод потенціалів, до машинних – угорський метод, метод диференціальних стрічок.

Розв’язання транспортної задачі за допомогою ручних методів складається з наступних етапів:

- визначення початкового опорного рішення задачі;
- перевірка цього рішення на оптимальність;
- перехід від одного опорного рішення до другого.

3.3.2 Розв’язання транспортних задач

Алгоритм і методи рішення транспортної задачі можуть бути використані при вирішенні деяких економічних задач, що не мають нічого спільного з транспортуванням вантажу. В цьому випадку величини тарифів c_{ij} мають різний сенс залежно від конкретної економічної задачі, до таких задач відносяться:

– оптимальне закріплення за верстатами операцій з обробки деталей. В них c_{ij} є таким економічним показником, як продуктивність. Задача дозволяє визначити, скільки часу і на якій операції повинен використовуватися кожен з верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Оскільки транспортна задача вимагає знаходження мінімуму, то значення c_{ij} беруться з негативним знаком;

– оптимальне призначення або проблема вибору. Є m механізмів, які можуть виконувати n різних робіт з продуктивністю c_{ij}. Задача дозволяє визначити, який механізм і на яку роботу треба призначити, щоб добитися максимальної продуктивності;

– задача про скорочення виробництва з урахуванням сумарних витрат на виготовлення і транспортування продукції;

– збільшення продуктивності автомобільного транспорту за рахунок мінімізації порожнього пробігу. Зменшення порожнього пробігу скоротить кількість автомобілів для перевезень, збільшивши їх продуктивність;

– вирішення задач за допомогою методу заборони перевезень. Використовується в тому випадку, якщо вантаж від деякого постачальника по деяких причинам не може бути направлений одному із споживачів. Дане обмеження можна врахувати, надавши відповідній клітці достатньо велике значення вартості, тим самим в цю клітку не проводитимуться перевезення.

Приклад 5.

На підприємстві є три групи верстатів, кожна з яких може виконувати п’ять операцій з обробки деталей (операції можуть виконуватися у будь-якому порядку). Максимальний час роботи кожної групи верстатів, відповідно, дорівнює 100, 250, 180 год. Кожна операція повинна виконуватися, відповідно, 100, 120, 70, 110, 130 год. Визначити, скільки часу на яку операцію потрібно використовувати кожній групі верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Продуктивність кожної групи верстатів на кожну операцію задана матрицею C:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання.

Скористаємося алгоритмом рішення закритої транспортної задачі, при цьому під тарифом розуміємо продуктивність верстатів по операціях.

Оскільки в задачі потрібно знайти максимум, а згідно алгоритму транспортної задачі знаходиться мінімум, тарифи помножимо на (-1).

Таблиця 3.1

b_j / a_i		1	2	3	4	5	α_i
		100	**120**	**70**	**110**	**130**	
1	**100**	-3 **40**	-5	-11	-10 +	**-5** **60 -**	0
2	**250**	-5 **60**	-10 **120**	-15 **70**	-3	-2	-2
3	**180**	-4	-8	-6	-12 **110 -**	-10 **70** +	-5
β_j		-3	-8	-13	-7	-5	

Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$: $\Delta_{12} = -3$, $\Delta_{13} = -2$, $\Delta_{14} = 3$, $\Delta_{24} = -6$, $\Delta_{25} = -5$, $\Delta_{31} = -4$, $\Delta_{32} = -5$, $\Delta_{33} = -12$.

Оскільки $\Delta_{14} = 3 > 0$, перерозподіливши верстати, отримаємо нову таблицю.

Таблиця 3.2

b_j / a_i		1	2	3	4	5	α_i
		100	**120**	**70**	**110**	**130**	
1	**100**	-3 **40**	-5	-11	-10 **60**	**-5**	0
2	**250**	-5 **60**	-10 **120**	-15 **70**	-3	-2	-2
3	**180**	-4	-8	-6	-12 **50**	-10 **130**	-2
β_j		-3	-8	-13	-10	-8	

Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$: $\Delta_{12} = -3$, $\Delta_{13} = -2$, $\Delta_{15} = -3$, $\Delta_{24} = -9$, $\Delta_{25} = -8$, $\Delta_{31} = -1$, $\Delta_{32} = -2$, $\Delta_{33} = -9$.

Оскільки всі оцінки негативні, то знайдене рішення є оптимальним.

$$X_{îïò} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 60 & 120 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 130 \end{bmatrix}$$

Першій групі верстатів доцільно виконувати операції 1 і 4 тривалістю 40 і 60 годин відповідно, другій групі – операції 1, 2 і 3 тривалістю 60, 120 і 70 годин відповідно, третій групі – операції 4 і 5 тривалістю 50 і 130 годин відповідно, при цьому максимальне число оброблених деталей складе 5170 од.

4 Безумовна оптимізація

4.1 Необхідні й достатні умови для точки локального безумовного мінімуму

4.1.1 Аксіоматика та формулювання безумовної задачі мінімізації функції

Задача безумовної мінімізації формулюється таким чином: знайти мінімум (мінімуми) функції $y(\bar{x})$, якщо у якості рішення $\bar{x}^*$ може виступати будь-яка точка $\bar{x}$ n-мірного євклідова простору $\mathbf{R}^n$, або

$$\boxed{y(\bar{x}) \to \min_{\bar{x}\in\mathbf{R}^n}}\ .$$

(4.1)

Абсолютним, або *глобальним*, називають значення функції $y^{**} = y(\bar{x}^{**}) = \min\limits_{\bar{x}\in\Omega} y(\bar{x})$, якщо для усіх $\bar{x} \in \Omega$ справедливе співвідношення $y(\bar{x}^{**}) \le y(\bar{x})$.

Абсолютний максимум визначається аналогічним чином, тільки в останньому співвідношенні знак «≤» треба змінити на «≥».

Локальним, або *частковим*, називають значення функції $y^* = y(\bar{x}^*) = \min\limits_{\bar{x}\in\Omega\cap\mathbf{F}} y(\bar{x})$, якщо для усіх $\bar{x} \in \Omega\cap\mathbf{F}$ виконується нерівність $y(\bar{x}^*) \le y(\bar{x})$, де $\mathbf{F}$ – ε-окіл точки $\bar{x}^*$.

Область допустимих рішень у вигляді $\Omega\cap\mathbf{F}$ потрібна для відокремлення зовнішніх точок від області Ω у випадку, коли точка $\bar{x}$ знаходиться на границі області Ω.

У поточному курсі ми будемо шукати лише локальні мінімуми.

Головна властивість точки мінімуму: приріст функції в точці мінімуму є додатним незалежно від знака приросту аргументу:

$$\boxed{\Delta y^* \ge 0.}$$

4.2 Означена властивість виходить з визначення точки мінімуму:

$$y(\bar{x}^*) \le y(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega\cap\mathbf{F};$$

$$y(\bar{x}^*) \le y(\bar{x}^* + \Delta\bar{x});$$

$$y(\bar{x}^* + \Delta\bar{x}) - y(\bar{x}^*) \ge 0;$$

$$\Delta y^* \ge 0. \qquad (4.2)$$

4.2.1 Необхідні умови локального мінімуму

Розв’язання будь-якої оптимізаційної задачі у тій або іншій мірі зводиться до задачі безумовної мінімізації. Тому ця задача буде розглянута більш ретельно. І на початку розгляду отримуємо необхідні умови для точки локального мінімуму. Для цього разкладемо функцію цілі $y(\bar{x})$ у ряд Тейлора в ε-околі точки мінімуму $\bar{x}^*$

$$y(\bar{x}^* + \Delta\bar{x}) = y(\bar{x}^*) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^* \Delta x_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^* \Delta x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^* \Delta x_n +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^* \Delta x_1^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^* \Delta x_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2}\right)^* \Delta x_n^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^* \Delta x_1 \Delta x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_{n-1} \partial x_n}\right)^* \Delta x_{n-1} \Delta x_n \right] + R^*\left(\Delta\bar{x}^3, \Delta\bar{x}^4, \ldots\right),$$

де R – частина ряду розкладу, що залежить від приросту вектора змінних 3-го та більшого порядку малості; індекс * є ознака обчислення в точці мінімуму.

Перепишемо функцію цілі у матричному вигляді

$$y(\bar{x}^* + \Delta\bar{x}) = y(\bar{x}^*) + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{*T} \Delta\bar{x} + \frac{1}{2}\Delta\bar{x}^T \mathbf{H}^* \Delta\bar{x} + R^*(\Delta\bar{x}^3, \Delta\bar{x}^4, \ldots),$$

де $\mathbf{H}$ – матриця Гесса, що містить другі похідні:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{bmatrix};$$

$\frac{1}{2}\Delta\bar{x}^T \mathbf{H}^* \Delta\bar{x}$ – диференційна квадратична форма; $R^*(\Delta\bar{x}^3, \Delta\bar{x}^4, ..)$ – залишок розкладу, що залежить від приростів аргументу великих порядків.

Оскільки $\lim\limits_{\Delta\bar{x} \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}\Delta\bar{x}^T \mathbf{H}^* \Delta\bar{x} + R^*(\Delta\bar{x}, \Delta\bar{x}, ..)}{\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{*T} \Delta\bar{x}} = 0$ при умові, що вектор перших похідних

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^* \neq 0, \tag{4.3}$$

то ряд розкладу Тейлора набуде спрощеного вигляду

$$y(\bar{x}^* + \Delta\bar{x}) = y(\bar{x}^*) + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{*T} \Delta\bar{x} \cdot \tag{4.4}$$

Останній вираз (4.4) перетворимо у рівність приростів

$$\Delta y^* = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{*T} \Delta\bar{x} \cdot \tag{4.5}$$

Якщо покласти $x_i = const$ $(i=\overline{1,n};\ i \neq r)$, то з урахуванням (4.2)

$$\Delta y^* = \left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^* \Delta x_r \geq 0 \cdot \tag{4.6}$$

Із (4.6) виходить, що $\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^* = 0$, тому що в протилежному випадку до кожного $\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^* \neq 0$ завжди знайдеться протилежний за знаком приріст Δx_r, що приведе до порушення співвідношення (4.6).

Оскільки змінна x_r була довільно вибрана, то отриманий висновок торкається кожної змінної x_i, $i = \overline{1,n}$. Тому необхідні умови для точки локального мінімуму остаточно набувають виразу

$$\boxed{\left(\frac{\partial y}{\partial \overline{x}}\right)^* = 0}\,. \tag{4.7}$$

Отже, *необхідні умови полягають у рівності вектора перших частинних похідних функції цілі нулю*.

Точки, в яких виконуються необхідні умови звуться *стаціонарними*. Стаціонарна точка може бути як точкою екстремуму, так і точкою перегину.

4.2.2 Достатні умови локального мінімуму

Виведення необхідних умов (4.7) трималося на допущенні (4.3). Але в наслідок виведення був одержаний протилежний результат. Тому умови (4.7) вважаються необхідними, але зовсім не достатніми. Треба знову повторити виведення умов локального мінімуму без зневаження членів розкладу другого та більш високого порядку .

Розкладемо знову функцію цілі $y(\overline{x})$ у ряд Тейлора в ε-околі точки мінімуму $\overline{x}^*$ у приростах

$$\Delta y^* = \left(\frac{\partial y}{\partial \overline{x}}\right)^{*T} \Delta\overline{x} + \frac{1}{2}\Delta\overline{x}^T \mathbf{H}^* \Delta\overline{x} + R^*(\Delta\overline{x}^3, \Delta\overline{x}^4, ..)\,. \tag{4.8}$$

З урахуванням (4.7) розклад (4.8) набере вигляду

$$\Delta y^* = \frac{1}{2}\Delta\overline{x}^T \mathbf{H}^* \Delta\overline{x} + R^*(\Delta\overline{x}^3, \Delta\overline{x}^4, ..)\,. \tag{4.9}$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta\overline{x}\to 0} \dfrac{R^*(\Delta\overline{x}, \Delta\overline{x}, ..)}{\frac{1}{2}\Delta\overline{x}^T \mathbf{H}^* \Delta\overline{x}} = 0$ за умови, що знаменник $\frac{1}{2}\Delta\overline{x}^T \mathbf{H}^* \Delta\overline{x} \neq 0$, то ряд розкладу Тейлора з урахуванням (4.2) матиме вигляд

$$\Delta y^* = \frac{1}{2}\Delta\overline{x}^T \mathbf{H}^* \Delta\overline{x} \geq 0\,. \tag{4.10}$$

Таким чином, приріст функції у точці мінімуму визначається диференційною квадратичною формою. Співвідношення (4.10) виконується лише у випадку додатної визначеності матриці коефіцієнтів квадратичної форми, у даному разі – матриці Гесса. Отже, *достатні умови для точки* *локального мінімуму полягають у додатній визначеності матриці Гесса **H***, що обчислена в точці мінімуму.

Зауваження: якщо в деякій точці при виконанні необхідних умов матриця Гесса від'ємно визначена, то ця точка є локальним максимумом.

4.3 Класичні методи оптимізації

Усі методи оптимізації можна поділити на класичні та пошукові.

Класичні методи дозволяють знайти точку оптимуму через розв'язання системи рівнянь. Завдяки цьому отриманий розв'язок є точним, якщо вирішення системи рівнянь здійснювалось не наближеними методами.

Метод Ейлера

Метод Ейлера належить до класичних методів. Він базуєтьсь на необхідних та достатніх умовах точки локального мінімуму.

Приклад 6.

Методом Ейлера знайти мінімум функції

$$y(\overline{x}) = -x_1^3 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 18x_2 \to \min_{\overline{x}\in R^2}$$

Розв'язання.

Задачу розв'язують в три етапи.

Перший – полягає в розв'язанні системи n рівнянь:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

продиктованих необхідними умовами для точки локального мінімуму та знаходженні усіх стаціонарних точок.

другий – у формуванні матриці других часткових похідних для кожної стаціонарної точки;

третій – в перевірці отриманих матриць на додатну визначеність згідно з критерієм Сильвестра та знаходженням точки мінімуму, як цього вимагають достатні умови.

Для визначення характеру квадратичної форми використаємо критерій Сільвестра, який полягає в обчисленні головних визначників матриці квадратичної форми А :

$$\Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

якщо всі головні визначники додатні, то квадратична форма додатно визначена;

якщо всі непарні головні визначники від'ємні, а парні - додатні, то квадратична форма від'ємно визначена;

у решті випадків - не визначена або напіввизначена.

Перший етап. Для нашого прикладу отримаємо систему рівняннь:

$$\begin{cases} -3x_1^2+6x_2+6=0; \\ 6x_1+6x_2-18=0. \end{cases}$$

Розв'язком системи є стаціонарні точки $\bar{x}_A^{(0)}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$; $\bar{x}_B^{(0)}=\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix}$.

Другий етап. Визначимо елементи матриць других похідних $H_A^{(0)}$, $H_B^{(0)}$ відповідно в точках $\bar{x}_A^{(0)}$ і $\bar{x}_B^{(0)}$:

в точці $\bar{x}_A^{(0)}$ $\quad h_{11}=\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)_A^{(0)}=(-6x_1)_A^{(0)}=-12;$

в точці $\bar{x}_B^{(0)}$ $\quad h_{11}=\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)_B^{(0)}=(-6x_1)_B^{(0)}=24;$

$$h_{22}=\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)_A^{(0)}=\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)_B^{(0)}=6;$$

$$h_{12}=h_{21}=\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}\right)^{(0)}=\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\partial x_1}\right)^{(0)}=6;$$

Складемо матриці $H_A^{(0)}=\begin{bmatrix}-12 & 6\\ 6 & 6\end{bmatrix}$; $H_B^{(0)}=\begin{bmatrix}24 & 6\\ 6 & 6\end{bmatrix}$.

Третій етап. Згідно з критерієм Сильвестра матриця $H_A^{(0)}$ не визначена; матриця $H_B^{(0)}$ додатно визначена. Отже , $\bar{x}_B^{(0)}$ - точка локального мінімуму (при від'ємній визначеності матриці других похідних в стаціонарній точці має місце максимум функції).

У точці $\bar{x}^*=\bar{x}_B^{(0)}=\begin{bmatrix}-4\\7\end{bmatrix}$ задана функція дорівнює $y^*=-107$, що і потрібно знайти.

Метод геометричного програмування

Приклад 7. Знайти мінімум позінома:

$$y(\bar{x})=25\sqrt{x_1}+2\sqrt{x_1}\cdot x_2+\frac{20}{x_1x_2}.$$

Розв'язання. Дана задача є задачею геометричного програмування з нульовим ступенем труднощі, так як $T=n+1$. Її розв'язання зводиться до розв'язки системи лінійних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{T} w_j^*=1; \qquad (4.11)$$

$$\sum_{j=1}^{T} a_{kj}w_j^*=0, \quad k=1,2,\dots,n, \qquad (4.12)$$

де T -число доданків в позіномі; w_j^* - нові нормовані змінні, які характеризують ступінь участі j-го члена позінома у формуванні величини y^* і чисельно рівні відношенню величини j-го члена до величини y^*; a_{kj} показник степені κ-ї змінної x_k в j-м члені позінома; n - число змінних.

Для заданого позінома система (4.11)-(4.12) має вигляд

$$\begin{cases} w_1^* + w_2^* + w_3^* = 1; \\ \dfrac{1}{2} w_1^* + \dfrac{1}{2} w_2^* - w_3^* = 0; \\ w_2^* - w_3^* = 0, \end{cases}$$ а її рішення $\overline{w'}^* = [1/3 \quad 1/3 \quad 1/3]$.

Мінімум позінома визначається виразом

$$y^* = \prod_{j=1}^{T} \left(\frac{c_j}{w_j^*} \right)^{w_j^*}, \tag{4.13}$$

де c_j -коефіцієнт при j-м члені позінома.

Для нашої задачі

$$y^* = \left(\frac{25}{1/3} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{2}{1/3} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{20}{1/3} \right)^{1/3} = 30.$$

Значення змінних x_i^* можна визначити із системи рівнянь:

$$w_j^* = \frac{\prod_{i=1}^{n} c_j \left(x_j^* \right)^{a_{ij}}}{y^*}; \quad j = 1, 2, \ldots, T-1. \tag{4.14}$$

В умовах задачі система (4.14) має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} = \dfrac{25\sqrt{x_1}}{30}; \\ \dfrac{1}{3} = \dfrac{2\sqrt{x_1}\, x_2}{30}, \end{cases}$$ а її рішення $\overline{x}'^* = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{25} & \dfrac{25}{2} \end{bmatrix}$.

4.4 Ітераційні методи безумовної оптимізації

Прямими методами вирішують задачу оптимізації шляхом ітераційного наближення до точки мінімуму. Розв'язок отримають наближеним, але із забезпеченням наперед заданої точності. На відміну від класичних існує відносно багато прямих методів. Треба задаватися точністю обчислення. Крім того, повинна бути задана початкова точка наближення до мінімуму. Якщо вона не задана, її треба вибрати довільно або із здорового глузду – як можна ближче до передбаченого мінімуму.

У процесі пошуку мінімуму на кожному (k-му) кроці визначають нову точку наближення до мінімуму $\overline{x}^{(k+1)}$ таку, що значення функції у неї менше, ніж у попередній

$$y\left(\overline{x}^{(k+1)}\right) < y\left(\overline{x}^{(k)}\right). \tag{4.15}$$

Кожна нова (наступна) точка $\overline{x}^{(k+1)}$ пов'язана з попередньою $\overline{x}^{(k)}$ рекурентним співвідношенням

$$\overline{x}^{(k+1)} = \overline{x}^{(k)} + \lambda^{(k)} \Delta \overline{x}^{(k)}, \tag{4.16}$$

де $\Delta\overline{x}^{(k)}$ – напрямний вектор на *k*-му кроці; $\lambda^{(k)}$ – скалярне число, що визначає довжину *k*-го кроку в напрямку $\Delta\overline{x}^{(k)}$.

Процес мінімізації закінчують, як тільки на черговому кроці абсолютне значення усіх складових вектора перших частинних похідних функції цілі будуть менш, ніж задана точність обчислення

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^{(k)}\right| < \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.17}$$

Існує багато методів багатовимірної мінімізації, що відрізняються один від одного засобами визначення напрямного вектора $\Delta\overline{x}^{(k)}$ та довжини кроку $\lambda^{(k)}$ у рекурентному співвідношенні (4.16). Серед них найбільш поширеними є методи:

- найшвидшого спуску (метод Коші);
- Н'ютона;
- покоординатного спуска (Гаусса-Зейделя).

4.4.1 Метод найшвидшого спуску

Для методу найшвидшого спуску

$$\Delta\overline{x}^{(k)} = -\left(\frac{\partial y}{\partial \overline{x}}\right)^{(k)}, \tag{4.18}$$

а величина (значення) кроку $\lambda^{(k)}$ визначається як рішення задачі одномірної мінімізації функції

$$y(\lambda^{(k)}) = y\left(\overline{x}^{(k)}\right) - \lambda\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{(k)}, \tag{4.19}$$

Рекурентне співвідношення для методу найшвидшого спуску буде мати вид

$$\overline{x}^{(k+1)} = \overline{x}^{(k)} - \lambda\left(\frac{\partial y}{\partial \overline{x}}\right)^{(k)}$$

4.4.2 Метод Ньютона

Для методу Ньютона напрямний вектор

$$\Delta\overline{x}^{(k)} = -\left(H^{(k)}\right)^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial \overline{x}}\right)^{(k)}, \tag{4.20}$$

а величина кроку $\lambda^{(k)} = 1$.

Рекурентне співвідношення для методу Ньютона буде мати вид

$$\overline{x}^{(k+1)} = \overline{x}^{(k)} - \left(H^{(k)}\right)^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial \overline{x}}\right)^{(k)}$$

4.4.3 Метод покоординатного спуску

У методі покоординатного спуску, який ще зветься методом Гаусса-Зейделя, на відміну від інших на кожному кроці змінюється тільки одна зміна. Тому рекурентне співвідношення між попередньою точкою наближення до мінімуму та подальшою має вигляд

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} + \lambda_r^{(k)} \Delta x_r^{(k)}, \qquad (4.21)$$

де $\Delta x_r^{(k)} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}$, а $\lambda_r^{(k)} = \frac{1}{\left|\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}\right|}$.

Тобто

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} - \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}}{\left|\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}\right|}.$$

(4.22)

Зауважимо, що друга похідна в (4.18) обов'язково повинна братися за модулем, інакше при її від'ємному значенні процес мінімізіції піде у зворотному напрямку.

Варіювання змінних здійснюють послідовно: спочатку – першу, потім – другу і т.д. Цикл, що складається з n послідовних кроків, створює одну ітерацію. Пошук мінімуму закінчують, як тільки на черговому кроці абсолютне значення усіх складових вектора перших частинних похідних функції цілі будуть менш, ніж задана точність обчислень

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^{(k)}\right| < \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (4.23)$$

Приклад 8.

Методом покоординатного спуску знайти мінімум функції цілі $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$ *з точністю* $\varepsilon = 0.12$, *взяти за початкову точку наближення точку* $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.3 \end{bmatrix}$.

Розв'язання.

Нульова ітерація:

1-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(0)} = 3.48 > \varepsilon;$ $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(0)} = 14.4$

Нове значення змінної $x_1^{(1)}$ визначається відповідно до (4.22):

$$x_1^{(1)} = 2.4 - \frac{3.48}{14.4} = 2.1589.$$

Тепер формується нова проміжна точка $\bar{x}^{(1,0)} = \begin{bmatrix} 2.158 \\ 2.3 \end{bmatrix}$.

2-й крок. Нове значення змінної x_2 визначається також відповідно виразу (4.22). Треба пам'ятати, що до відповідних похідних підставляється нова проміжна точка $\bar{x}^{(1.0)}$.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(1,0)} = 2.92 > \varepsilon; \ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{(1,0)} = 13.8; \ x_2^{(1)} = 2.3 - \frac{2.92}{13.8} = 2.088.$$

У результаті нульової ітерації отримали точку $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.158 \\ 2.088 \end{bmatrix}.$

Необхідно пересвідчитися у наближенні до точки мінімуму в результаті нульової ітерації: $y^{(1)} = -7.882 < -7.129 = y^{(0)}$.

Перевіремо виконання співвідношення (4.23)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(1)} = 1.442 > \varepsilon; \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(1)} = 0.131 > \varepsilon;$$

Співвідношення (4.23) не виконується. Тому переходимо до першої ітерації.

Перша ітерація:

1-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(1)} = 1.442 > \varepsilon; \ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(1)} = 12.948; \ \mathrm{x}_1^{(2)} = 2.158 - \frac{1.442}{12.948} = 2.047; \ \bar{x}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} 2.047 \\ 2.088 \end{bmatrix}.$

2-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(2,1)} = 0.7972 > \varepsilon; \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{(2,1)} = 12.528; \ \mathrm{x}_2^{(2)} = 2.088 - \frac{0.7972}{12.528} = 2.0243.$

В результаті першої ітерації отримаємо $\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.047 \\ 2.0243 \end{bmatrix}.$

Треба пересвідчитися у наближенні до точки мінімуму в результаті першої ітерації: $y^{(2)} = -7.99004 < -7.882 = y^{(1)}$.

Перевіримо виконання співвідношення (4.23)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(2)} = 0.4248 > \varepsilon; \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(2)} = |-0.008| < \varepsilon;$$

Співвідношення (4.23) не виконується по змінній x_1, переходимо до другої ітерації .

Друга ітерація:

1-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(2)} = 0.4248 > \varepsilon; \ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(2)} = 12.282; \ x_1^{(3)} = 2.047 - \frac{0.4243}{12.282} = = 2.0124; \ \bar{x}^{(3,2)} = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0243 \end{bmatrix}.$

2-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(3,2)} = 0.219 > \varepsilon; \ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{(3,2)} = 12.1458; \ x_2^{(3)} = 2.0243 - \frac{0.219}{12.1458} = 2.0061; \qquad \bar{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0061 \end{bmatrix};$

$\mathrm{y}^{(3)} = -7.9993 < -7.9904 = y^{(2)}.$

Перевіримо виконання співвідношення (4.23)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(3)} = 0.113 < \varepsilon; \qquad \left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(3)}\right| = |-0.001| < \varepsilon;$$

Співвідношення (4.23) виконується.

$$\bar{x}^{*} = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0061 \end{bmatrix}; \qquad \mathrm{y}^{*} = -7.9993$$

5 Умовна оптимізація. Багатовимірні задачі з обмеженнями у вигляді рівностей

5.1 Формулювання задачі

Математична модель багатовимірної оптимізаційної задачі з обмеженнями у вигляді рівності має вигляд

$$y(\bar{x}) \to \underset{\bar{x}\in\Omega}{opt} \tag{5.1}$$

$$\Omega:\ f_i(\bar{x}) = 0, \quad i = \overline{1,m}, n \tag{5.2}$$

Як рішення задачі (5.1) можуть виступати лише точки, що належать до неявної точкової множини Ω, тобто точки, які являють собою рішення системи (5.2).

Кількість рівності m повинно бути менше, ніж число змінних задачі n, інакше задача не має рішення (при $m>n$) або зводиться до перебору кількох точок (при $m=n$). У загальному випадку система рівнянь (5.2) нелінійна. Отже, нема гарантії, що вона взагалі має рішення.

5.2 Розбиття змінних на залежні й незалежні

Розгляд багатовимірної оптимізаційної задачі з обмеженнями у вигляді рівності ґрунтується на концепції залежних й незалежних змінних, що полягає у розбитті усіх змінних задачі на два підвектори: $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{s} \\ \bar{t} \end{bmatrix}$, де $\bar{s}$ – підвектор залежних змінних; $\bar{t}$ – підвектор незалежних змінних. При цьому

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix};\ \bar{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \dots \\ x_{m+p} \end{bmatrix}; \quad m+p=n.$$

Зауважимо, що будь-яке інше розбиття завжди можна звести до зазначеного за рахунок відповідної перенумерації змінних.

Зазначимо також, що залежні змінні часто звуться *змінними стану*, а незалежні – *змінними розв'язання*.

5.3 Метод підстановки

Найпростішим методом розв'язання задачі (5.1), (5.2) є метод підстановки.

Задача (5.1), (5.2) з урахуванням розбиття змінних на залежні й незалежні набуває вигляду

$$\boxed{y(\bar{s},\bar{t}) \to \min_{\bar{s},\bar{t}\in\Omega}}, \tag{5.3}$$

$$\boxed{\Omega:\ f_i(\bar{s},\bar{t}) = 0, \quad i = \overline{1,m}}\ . \tag{5.4}$$

Метод підстановки полягає в перетворенні системи рівності (5.4) у систему

$$\bar{s} = \bar{\varphi}\ (\bar{t}) \tag{5.5}$$

та підстановці в (5.3) замість $\bar{s}$ його вираз через $\bar{t}$. Така процедура підстановки призводить до того, що складна задача умовної мінімізації (5.3), (5.4) перетворюється у задачу безумовної мінімізації

$$\boxed{y(\bar{t}) \to \min_{\bar{t} \in \mathbf{R}^{n-m}}}, \tag{5.6}$$

з числом змінних меншим, ніж у початковій задачі.

5.4 Необхідні умови локального мінімуму

Розкладемо функцію цілі $y(\bar{x})$ у ряд Тейлора у приростах аргументів в ε-околі точки мінімуму $\bar{x}^*$ у векторній формі з урахуванням розбиття змінних на залежні й незалежні і знехтуванням нелінійних членів розкладу

$$\Delta y^* = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}}\right)^{*T} \Delta\bar{s} + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{t}}\right)^{*T} \Delta\bar{t}\,.$$

(5.7)

Так само зробимо з обмеженням задачі (4.6):

$$\Delta \bar{f}^* = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{s}}\right)^{*T} \Delta\bar{s} + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}}\right)^{*T} \Delta\bar{t} = 0\,. \tag{5.8}$$

Позначимо $\mathbf{W}^* = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{s}}\right)^{*T}$; $\mathbf{C}^* = \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}}\right)^{*T}$.

Матриця **W** має розмір ($m\times m$) і зветься матрицею стану або матрицею Якобі, або якобієвою матрицею. Матриця **C** має розмір ($m\times p$) і зветься матрицею керування.

У загальному випадку якобієва матриця і матриця керування мають відповідно вигляд:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_m} \\ .. & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial s_1} & \frac{\partial f_m}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial s_m} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial t_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_{21}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial t_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial t_1} & \frac{\partial f_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial t_p} \end{bmatrix}.$$

Перша складається з перших частинних похідних функції обмеження по змінних стану (залежні змінні), а друга – по змінних рішення (незалежні змінні).

З урахуванням здійснених позначок (5.8) набуде вигляду

$$\mathbf{W}^* \Delta\bar{s} + \mathbf{C}^* \Delta\bar{t} = 0\,. \tag{5.9}$$

Вважатимемо, що розбиття змінних здійснювалось таким чином, щоб якобієва матриця була невиродженою. Тоді помножимо (5.9) на обернену матрицю Якобі:

$$(\mathbf{W}^*)^{-1}\mathbf{W}^* \Delta\bar{s} + (\mathbf{W}^*)^{-1}\mathbf{C}^* \Delta\bar{t} = 0\,; \tag{5.9}$$

або

$$\Delta\bar{s} + (\mathbf{W}^*)^{-1}\mathbf{C}^* \Delta\bar{t} = 0\,. \tag{5.10}$$

Розв’яжемо (5.10) відносно приросту вектора незалежних змінних

$$\Delta\bar{s} = -(\mathbf{W}^*)^{-1}\mathbf{C}^* \Delta\bar{t}\,. \tag{5.11}$$

Підставимо (5.11) у (5.7):

$$\Delta y^* = -\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}}\right)^{*T} (\mathbf{W}^*)^{-1}\mathbf{C}^* \Delta\bar{t} + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{t}}\right)^{*T} \Delta\bar{t}\,. \tag{5.12}$$

Приведемо подібні

$$\Delta y^* = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{t}} \right)^{*T} - \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}} \right)^{*T} (\mathbf{W}^*)^{-1} \mathbf{C}^* \right] \Delta \bar{t} \, . \qquad (5.13)$$

Вираз у квадратних дужках являє собою вектор-рядок перших умовних похідних у точці мінімуму та позначається як $\left(\frac{\delta y}{\delta \bar{t}} \right)^{*\mathrm{т}}$ і для будь-якої точки має вигляд

$$\left(\frac{\delta y}{\delta \bar{t}} \right)^{\mathrm{т}} = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{t}} \right)^{T} - \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}} \right)^{T} (\mathbf{W})^{-1} \mathbf{C} \, . \qquad (5.14)$$

Складова $\left(\frac{\delta y}{\delta t_j} \right)$ p-вимірного вектора (5.14) зветься *першою умовною частинною похідною* функції цілі y по j-ї незалежної змінної і показує (при лінійній апроксимації), як зміниться функція y, якщо змінна зросте на одиницю

За означенням точки локального мінімуму та з урахуванням позначення (5.14) вираз (5.13) перетворюється у співвідношення

$$\Delta y^* = \left(\frac{\delta y}{\delta \bar{t}} \right)^{*\mathrm{т}} \Delta \bar{t} \ge 0 \, . \qquad (5.15)$$

За умовами зміни тільки однієї змінної t_r останнє співвідношення набере вигляду

$$\Delta y^* = \left(\frac{\delta y}{\delta t_r} \right)^{*} \Delta t_r \ge 0 \, . \qquad (5.16)$$

Приріст Δt_r у (5.16) може бути як прибутковим, так і від'ємним, тому нерівність (5.16) залишається справедливою лише при $\left(\frac{\delta y}{\delta t_r} \right)^{*} = 0$. Оскільки змінна t_r обиралася довільно, то те саме можна сказати про будь-яку незалежну змінну t_j $\left(\mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{p}} \right)$, або

$$\boxed{\left(\frac{\delta y}{\delta \bar{t}} \right)^{*} = 0} \qquad (5.17)$$

Вираз (5.17) являє собою необхідні умови для точки локального мінімуму в задачі мінімізації при обмеженнях у вигляді рівності.

5.5 Метод Якобі

Визначення стаціонарних точок методом Якобі у задачі мінімізації при обмеженнях у вигляді рівності полягає у розв'язанні системи, що складається з n рівнянь, серед яких m визначаються обмеженнями задачі змінні, а останні $p=n-m$ – необхідними умовами для точки локального мінімуму:

$$\begin{cases} f_i(\bar{s}, \bar{t}) = 0, & i = \overline{1, m}; \\ \dfrac{\delta y}{\delta t_j} = 0, & j = \overline{1, p}. \end{cases} \qquad (5.18)$$

5.6 Метод невизначених множників Лагранжа

Цей метод полягає у заміні функції цілі функцією Лагранжа і подальшому визначенні її стаціонарних точок, що співпадають з стаціонарними точками початкової функції цілі.

Функція Лагранжа позначається як $L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right)$ і утворюється таким чином:

$$L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right) = y(\bar{x}) - \bar{\lambda}^{\mathrm{T}} \bar{f}(\bar{x}) \tag{5.19}$$

або

$$L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right) = y(\bar{x}) + \bar{\lambda}^{\mathrm{T}} \bar{f}(\bar{x}), \tag{5.20}$$

де $\bar{\lambda}$ – вектор невизначених множників.

В алгебраїчній формі функція Лагранжа (5.19) має вигляд

$$L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mathrm{m}}\right) = y - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i , \tag{5.21}$$

Стаціонарні точки функції Лагранжа визначаються саме так, як у задачі безумовної мінімізації, тобто як розв'язок системи рівнянь, що утворюється прирівнюванням частинних похідних нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\, L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right)}{\partial\, \bar{x}} = 0\ ; & (5.22) \\[2ex] \dfrac{\partial\, L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right)}{\partial\, \bar{\lambda}} = f\left(\bar{x}\right) = 0. & (5.23) \end{cases}$$

Система налічує n рівнянь типу (5.22), що являють собою частинні похідні функції Лагранжа по змінних задачі, та m рівнянь типу (5.23), що являють собою обмеження задачі. У якості останніх можна визнавати частинні похідні функції Лагранжа по невизначених множниках.

Невідомі в системі складаються з n змінних задачі $x_j\ (j = \overline{1,n})$ та m невизначених множників $\lambda_i\ (i = \overline{1,m})$. Рівно стільки налічується рівнянь у системі (5.22), (5.23). В процесі розв'язання задачі визначаються множники $\lambda_i\ (i = \overline{1,m})$, на які можна зовсім не звертати уваги. Інтерес являють тільки невідомі $x_j\ \ (j = \overline{1,n})$.

Розглянемо застосування методу на прикладі рішення задачі оптимальної реалізації продукції.

Приклад 9.

Борошномельний комбінат реалізує борошно двома способами: уроздріб через магазин і оптом через торгових агентів. При продажі x_1 *кг борошна через магазин витрати на реалізацію складають* x_1^2 *грош. од., а при продажі* x_2 *кг борошна за допомогою торгових агентів –* x_2^2 *грош. од. Визначити, скільки кг борошна слід продавати кожним способом, щоб витрати на реалізацію були мінімальними, якщо в добу для продажу виділяється 5000 кг борошна.*

Розв'язання.

Математична модель задачі матиме вигляд:

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\mathbf{\Omega}: \begin{cases} x_1 + x_2 = 5000 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2 \end{cases}$$

Функція Лагранжа і система рівнянь набудуть виду:

$$\partial L\left(\bar{x},\quad \bar{\lambda}\right) = x_1^2 + x_2^2 - \lambda\left(x_1 + x_2 - 5000\right).$$

а сама система рівнянь буде мати вигляд

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda = 0; \\ 2x_2 - \lambda = 0; \\ -x_1 - x_2 + 5000 = 0. \end{cases}$$

Звідки знаходимо стаціонарну точку $\bar{x}^{(0)\,'} = \left[2500 \quad 2500\right]$; $y(\bar{x}) = 12500000$

Надаючи x_1 значення більше і менше 2500 знаходимо $y(\bar{x})$ і з визначення екстремуму функції отримуємо, що $y(\bar{x})$ при $x_1 = x_2 = 2500$ досягає мінімуму.

Для отримання мінімальних витрат необхідно реалізувати в добу через магазин і торгових агентів по 2500 кг борошна, при цьому витрати на реалізацію складуть 12500 тис. грош. од.

5.7 Достатні умови локального мінімуму

Розглянуті методи лише визначають стаціонарні точки. Щоб гарантовано відібрати серед стаціонарних точок мінімальні, треба перевірити достатні умови локального мінімуму, що полягають у додатній визначеності в точці локального мінімуму матриці других умовних похідних функції цілі $\mathbf{S}=\left[\dfrac{\delta^2 y}{\delta t_i \delta t_j}\right]$.

Матриця має розмір *(p×p)* і визначається за формулою

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}_{tt} - \mathbf{P}_{ts}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C} - \left(\mathbf{P}_{ts}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\right)^{\mathrm{т}} + \left(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\right)^{\mathrm{т}}\mathbf{P}_{ss}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C} \quad , \tag{5.24}$$

де $\mathbf{W}^{-1}$, $\mathbf{C}$ – вже знайомі обернена матриця Якобі і матриця керування;

$\mathbf{P}_{tt}$, $\mathbf{P}_{ts}$, $\mathbf{P}_{ss}$ – підматриці матриці

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ss} & \mathbf{P}_{st} \\ \mathbf{P}_{ts} & \mathbf{P}_{tt} \end{bmatrix} = \mathbf{H} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_{\mathrm{i}} \mathbf{H}_i\ . \tag{5.25}$$

Тут $\mathbf{H}$ – вже знайома матриця других похідних функції цілі; $\mathbf{H}_i$ – матриця других похідних i-го обмеження задачі, визначається як

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_n^2} \end{bmatrix},\ i = \overline{1,m}\ ; \tag{5.26}$$

λ_{i} – *коефіцієнти чутливості*, складові вектора $\bar{\lambda}^{\mathrm{т}} = \left(\dfrac{\partial y}{\partial \bar{s}}\right)^{\mathrm{т}} \mathbf{W}^{-1}$.

6 Умовна оптимізація. Багатовимірні задачі при двобічних обмеженнях змінних

6.1 Формулювання задачі

Математична модель багатовимірної оптимізаційної задачі при двобічних обмеженнях має вигляд

$$\boxed{y(\bar{x}) \to \min_{\bar{x}\in\Omega}} \tag{6.1}$$

$$\boxed{\Omega: \quad \bar{x}^{+} \le \bar{x} \le \bar{x}^{++}}\ . \tag{6.2}$$

У якості рішення задачі (6.1) може виступати лише точка точкової множини Ω, що визначається гіперпаралелепіпедом (6.2).

6.2 Необхідні умови локального мінімуму

Розкладемо функцію цілі $y(\bar{x})$ у ряд Тейлора у приростах в ε-околі точки мінімуму $\bar{x}^*$ у векторній формі з урахуванням тільки лінійних членів розкладу, тому що інші вважаємо занадто малими,

$$\Delta y^* = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{*T} \Delta\bar{x}\ . \tag{6.3}$$

За означенням точки мінімуму

$$\Delta y^* = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{*T} \Delta\bar{x} \ge 0\ . \tag{6.3}$$

Хай змінюється тільки одна r-а змінна, тоді

$$\Delta y^* = \left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{*} \Delta x_r \ge 0, \quad \mathrm{r} \in \{1,2,\dots,\mathrm{n}\}\ . \tag{6.4}$$

Стосовно змінної x_r існує три варіанти знаходження мінімуму:

- на нижній границі області визначення змінної $x_r^* = x_r^+$;
- на верхній границі $x_r^* = x_r^{++}$;
- всередині області визначення $x_r^+ < x_r^* < x_r^{++}$.

Розглянемо кожний варіант окремо.

Нехай мінімум щодо змінної x_r знаходиться на нижній границі, тобто $x_r^* = x_r^+$. У цьому випадку приріст аргументу може бути тільки додатним $\Delta x_r > 0$, а частинна похідна функції цілі по змінній x_r невід'ємною:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{*} \ge 0\,, \tag{6.5}$$

інакше буде порушена умова (6.4).

Нехай мінімум щодо змінної x_r знаходиться на верхній границі, тобто $x_r^* = x_r^{++}$. У цьому випадку приріст аргументу може бути тільки від'ємним $\Delta x_r < 0$, а частинна похідна функції цілі по змінній x_r недодатною:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^* \le 0. \tag{6.6}$$

У протилежному випадку умова (6.4) буде порушена.

Хай мінімум щодо змінної x_r знаходиться всередині області визначення, тобто $x_r^+ < x_r^* < x_r^{++}$. У цьому випадку (за аналогією з виведенням необхідних умов у задачі безумовної мінімізації) приріст аргументу може бути як від'ємним $\Delta x_r < 0$, так і додатним $\Delta x_r > 0$, а частинна похідна функції цілі по змінній x_r повинна дорівнювати тільки нулю:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^* = 0. \tag{6.7}$$

Якщо це не так, завжди можна підібрати приріст аргументу за знаком, протилежним знаку похідної, що призведе до порушення умови .

Оскільки змінна відбиралася довільно x_r, то те саме можна сказати про будь-яку змінну. Отже, необхідні умови локального мінімуму формулюються таким чином:

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^* \ge 0, \quad \text{якщо} \quad x_r^* = x_r^+; \\ &\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^* \le 0, \quad \text{якщо} \quad x_r^* = x_r^{++}; \\ &\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^* = 0, \quad \text{якщо} \quad x_r^+ < x_r^* < x_r^{++}. \end{aligned}} \tag{6.8}$$

6.3 Перша група достатніх умов

Нехай щодо точки $\bar{x}^\circ$ виконуються необхідні умови локального мінімуму.

Розкладемо функцію цілі у ряд Тейлора в околі точки $\bar{x}^\circ$ у приростах при лінійній апроксимації

$$\Delta y^\bullet = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{\circ T} \Delta\bar{x}. \tag{6.9}$$

За означенням точки мінімуму

$$\Delta y^\bullet = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}}\right)^{\circ} \Delta\bar{x} \ge 0 \;\cdot \tag{6.10}$$

Перша група достатніх умов для точки мінімуму полягає у виконанні необхідних, якщо жодна з частинних похідних функції цілі не дорівнює нулю. Інакше кажучи, якщо всі складові вектора $\bar{x}^\circ$ знаходяться на границі, жодна з похідних $\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)$ відповідної точки не дорівнює нулю і виконуються необхідні умови:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^* > 0, \quad \text{Шђќ”} \quad x_i^* = x_i^+ ;$$
$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^* < 0, \quad \text{Шђќ”} \quad x_i^* = x_i^{++} , \qquad (6.11)$$

то вони одночасно є і достатні, тобто $\bar{x}^{\circ} = \bar{x}^*$.

Допустимо, що змінюється тільки одна змінна x_r, тоді

$$\Delta y^{\bullet} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{\circ} \Delta x_r \geq 0 , \qquad (6.12)$$

тому що знак похідної за умовами (6.11) збігається із знаком приросту аргументу, а це обумовлює невід'ємність виразу (6.12). До аналогічного висновку ми дійдемо, коли будемо змінювати будь яку іншу зміну. Отже, *умови (6.11) є не тільки необхідні, а і достатні.*

6.4 Друга група достатніх умов

Друга група достатніх умов має місце, коли у точці мінімуму декілька змінних (або всі загалом) мають відповідні нульові похідні. У цьому випадку розклад функції цілі у ряд Тейлора в околі точки $\bar{x}^{\circ}$ здійснюється з урахуванням членів другого порядку.

Розіб'ємо вектор $\bar{x}^*$ на дві складові

$$\bar{x}^{*\mathrm{T}} = \left[\bar{x}_1^{*\mathrm{T}} \quad \bar{x}_2^{*\mathrm{T}}\right] \qquad (6.13)$$

так, щоб складовим x_{1j}^* вектора $\bar{x}_1^*$ відповідали похідні $\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^* \neq 0$, а складовим x_{2j}^* вектора $\bar{x}_2^*$ – похідні $\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^* = 0$. Тоді ряд Тейлора має вигляд

$$\Delta y^* = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}_1}\right)^* \Delta\bar{x}_1 + \frac{1}{2}\Delta\bar{x}_1 \mathbf{H}_{11}^* \Delta\bar{x}_1 + \frac{1}{2}\Delta\bar{x}_1 \mathbf{H}_{12}^* \Delta\bar{x}_2 + \frac{1}{2}\Delta\bar{x}_2^{\mathrm{T}} \mathbf{H}_{21}^* \Delta\bar{x}_1 + \frac{1}{2}\Delta\bar{x}_2^{\mathrm{T}} \mathbf{H}_{22}^* \Delta\bar{x}_2 . \qquad (6.14)$$

Тут $\mathbf{H}_{11}, \mathbf{H}_{12}, \mathbf{H}_{21}, \mathbf{H}_{22}$ – підматриці матриці Гесса згідно з розбиттям змінних.

Нехай в околі $\bar{x}^*$ змінюються тільки складові вектора $\bar{x}_1$, тобто $\Delta\bar{x}_2 = 0$. Тоді

$$\Delta y^* = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}_1}\right)^{*\mathrm{T}} \Delta\bar{x}_1 + \frac{1}{2}\Delta\bar{x}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{H}_{11}^* \Delta\bar{x}_1 . \qquad (6.15)$$

Оскільки $\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{x}_1}\right)^* \neq 0$, то другим членом в (6.15) можна знехтувати. Якщо тепер міркувати саме так, як при розгляді першої групи достатніх умов, то ми дійдемо до аналогічного висновку: *необхідні умови щодо змінних вектора* $\bar{x}_1$ *одночасно є достатні.*

Тепер, навпаки, нехай в околі $\bar{x}^*$ змінюються тільки складові вектора $\bar{x}_2$, тобто $\Delta\bar{x}_1 = 0$. Тоді

$$\Delta y^* = \frac{1}{2}\Delta\bar{x}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_{22}^*\Delta\bar{x}_2 . \qquad (6.16)$$

Останній вираз (6.16) говорить про те, що для виконання достатніх умов необхідно, щоб *матриця* $\mathbf{H}_{22}^*$ *була додатно визначена.* Отже, достатні умови задачі (6.1), (6.2) полягають в додатній визначеності матриці других частинних похідних функції цілі по тих змінних, що мають нульові перші похідні.

6.5 Диференціальний алгоритм розв'язання задачі мінімізіції функцій при двобічних обмеженнях змінних.

6.5.1 Можливі порушення необхідних умов

Оскільки класичні методи розв'язання задач мінімізації базуються на рівності частинних похідних нулю, то вони стають непридатними для пошуку мінімуму функції при двобічних обмеженнях на змінні, коли в точці мінімуму похідні можуть відрізнятися від нуля. У таких умовах розв'язання задачі здійснюється за допомогою розвинутого методу покоординатного спуску, який тепер змінює свою назву на *диференціальний алгоритм*.

Розв'язання задачі за диференціальним алгоритмом полягає у наступному. На кожному кроці змінюється тільки одна змінна x_r, інші залишаються незмінними. Змінна відбирається в наслідок аналізу виконання необхідних умов у поточній *k*-й точці наближення до мінімуму. Якщо по деякій змінній необхідні умови порушені, то її зміна у потрібному напрямку призведе до зменшення функції цілі. Порушення необхідних умов можливі лише у двох випадках:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)} > 0, \qquad x_r^{(k)} > x_r^{+} \ , \ \Delta x_r^{(k)} < 0 \qquad (6.17)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)} < 0, \qquad x_r^{(k)} < x_r^{++} \ , \Delta x_r^{(k)} > 0 \ . \qquad (6.18)$$

6.5.2 Вибір розміру кроку

На кожному кроці мінімізації, крім вибору напрямку руху, потрібно визначати розмір кроку у вибраному напрямку. Якщо в задачі безумовної мінімізації розмір кроку відносно змінної x_r визначався за умовами обернення в нуль відповідної похідної $\frac{\partial y}{\partial x_r}$, то тепер, крім цього, треба враховувати можливість виходу змінної x_r за межі області визначеності. Отже, якщо (6.17), то

$$\Delta x_r^{(k)} = \max_{\Delta x_r < 0}\left[x_r^{+} - x_r^{(k)};\ \Delta x_r \Big|\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right) = 0\right]; \qquad (6.19)$$

якщо (6.18), то

$$\Delta x_r^{(k)} = \min_{\Delta x_r > 0}\left[x_r^{++} - x_r^{(k)};\ \Delta x_r\Big|_{\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)=0}\right]. \qquad (6.20)$$

Значення $\Delta x_r\Big|_{\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)=0}$ краще за все слід обчисляти за методикою покоординатного спуску. Тоді критерії вибору розміру k-го кроку наближення (6.19), (6.20) матиме наступний вигляд відповідно.

$$\Delta x_r^{(k)} = \max_{\Delta x_r < 0}\left[x_r^{+} - x_r^{(k)};\quad -\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}}{\left|\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}\right|}\right]; \qquad (6.21)$$

$$\Delta x_r^{(k)} = \min_{\Delta x_r > 0}\left[x_r^{++} - x_r^{(k)};\quad -\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}}{\left|\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}\right|}\right]. \qquad (6.22)$$

Приклад 10. За допомогою *диференціального алгоритму* розв’язати задачу мінімізації функції

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\ \begin{bmatrix}-12\\-20\end{bmatrix} \le \bar{x} \le \begin{bmatrix}15\\5\end{bmatrix}$$

з точністю обчислень $\varepsilon = 0.5$ і початковою точкою наближення $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

Розв’язання. Для розв’язання даної задачі треба скористатися диференціальним алгоритмом - методом покоординатного спуску, узагальненим на випадок двобічної обмеженості змінних .

Розв’язання прикладу 10 являє собою послідовність ітерацій.

Нульова ітерація:

1-й крок. У початковій точці $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix};\ y^{(0)} = 13$ (задана точність за змінною x_1 ще не досягнена): $\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(0)}\right| = 2x_1 + 2x_2 = 6 > \varepsilon.$ Оскільки $x_1^{(0)} > x_1^{+}$ і $\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(0)} > 0$, приріст змінної обчислюється за допомогою виразу (6.21):

$$\Delta x_1^{(0)} = \max_{\Delta x_1 < 0}\left[-12 - 1;\ -\frac{6}{2}\right] = -3.$$

Нове значення змінної $x_1^{(1)}$ буде рівним

$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)} = 1 - 3 = -2.$ Проміжна точка $\bar{x}^{(1,0)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix};$

2-й крок $\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(1,0)}\right| = 4x_2 + 2x_1 = 4 > \varepsilon;$

$$\Delta x_2^{(0)} = \max_{\Delta x_2 < 0}\left[-20 - 2; \quad -\frac{4}{4}\right] = -1; \qquad x_2^{(1)} = 2 - 1 = 1.$$

Нове значення функції у точці $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ свідчить, що напрям руху до точки мінімуму обрано вірно: $y^{(1)} = 2 < \mathrm{y}^{(0)} = 13.$

Перша ітерація:

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(1)}\right| = |-2| > \varepsilon; \qquad \Delta x_1^{(1)} = \min_{\Delta x_1 > 0}\left[15 - (-2); \quad -\frac{-2}{2}\right] = 1;$$

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + \Delta x_1^{(1)} = -2 + 1 = -1; \quad \bar{x}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(2,1)}\right| = 2 > \varepsilon; \qquad \Delta x_2^{(1)} = \max_{\Delta x_2 < 0}\left[-20 - 1; \quad -\frac{2}{4}\right] = -0{,}5;$$

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + \Delta x_2^{(1)} = 1 - 0{,}5 = 0{,}5; \quad \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$y^{(2)} = 0{,}5 < \mathrm{y}^{(1)} = 2.$$

Друга ітерація:

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(2)}\right| = |-1| > \varepsilon; \qquad \Delta x_1^{(2)} = \min_{\Delta x_1 > 0}\left[15 - (-1); \quad -\frac{-1}{2}\right] = 0{,}5; \qquad x_1^{(3)} = x_1^{(2)} + \Delta x_1^{(2)} = -1 + 0{,}5 = -0{,}5; \qquad \bar{x}^{(3,2)} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(3,2)}\right| = 1 > \varepsilon; \qquad \Delta x_2^{(2)} = \max_{\Delta x_2 < 0}\left[-20 - 0{,}5; \quad -\frac{1}{4}\right] = -0{,}25; \quad x_2^{(3)} = x_2^{(2)} + \Delta x_2^{(2)} = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25; \quad \bar{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$$

$$y^{(3)} = 0{,}125 \quad < \mathrm{y}^{(2)} = 0{,}5.$$

Третя ітерація:

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(3)}\right| = |-0{,}5| = \varepsilon; \qquad \left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(3)}\right| = 0.$$

Необхідні умови додержуються заданої точності, отже, треба перевірити достатні: якщо матриця других похідних для обох змінних додатно визначена, тоді $\bar{x}^{(3)}$ є точкою мінімума.

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = 2 > 0; \quad \Delta_2 = 8 - 4 = 4 > 0.$$

Отже мінімум знайдено: $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}; \quad y^* = y^{(3)} = 0{,}125.$

Список джерел

1. Самойленко М. І. Математичне програмування. / М. І. Самойленко. – Харків : Основа, 2002. – 424с.
2. Зайченко Ю. П. Исследование операций: Учеб. пособие для студентов вузов. / Ю. П. Зайченко. – Киев : Вища школа.,1989. – 392с.
3. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование. / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. В. Волощенко. – М. : Высш.шк., 1980.
4. Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем. / Е. В. Бережная. – М. : Финансы и статистика, 2001.
5. Красс М. С. Математические методы и модели для магистрантов экономики: учебное пособие. / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2006. – 496 с.
6. Лагоша Б. А. Оптимальное управление в экономике. / Б. А. Лагоша. – М.: Финансы и статистика, 2003.
7. Зайченко Ю. П. Исследование операций. Сборник задач. / Ю. П. Зайченко, С. А. Шумилова. – Киев. :Вища школа, 1990. – 239 с.
8. Плис А. И. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учебное пособие. / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 1999.
9. Монахов А. В. Математические методы анализа экономики. / А. В. Монахов. – СПб.: Питер, 2002. – 176 с.
10. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике. / П. В. Конюховский. – СПб.: Питер, 2002.
11. Методичні вказівки до самостійного вирішення задач та виконання розрахункових завдань з курсу «Математичного програмування». ХДАМГ; уклад. : М. І. Самойленко, Г. В. Білогурова, О. М. Штельма, І. О. Гавриленко. – Харків. : 2006.

Навчальне видання

ШТЕЛЬМА Ольга Миколаївна

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З КУРСУ

«Оптимізаційні методи та моделі»

(для студентів 2 курсу денної форми навчання освітнього рівня «бакалавр», спеціальності 122 – Комп'ютерні науки)

Відповідальний за випуск *М. В. Булаенко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *К. А. Алексанян*

План 2016, поз. 206 Л

Підп. до друку 13.04.2016. Формат 60х84/16.
Друк на різографі. Ум. друк. арк. 1,3
Тираж 50 пр. Зам. №

Виконавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК 5328 від 11.04.2017.